GEOMETRI TRANSFORMASI

MATERI : TRANSFORMASI BALIKAN (VI.C)

Disusun Oleh:

1. KARMILA
2. NURMALINA
3. DWINDA JANUARTI
4. YUYUN MARNITA
5. ROVELI
6. MIKA MARDASARI
7. IKA NURSINTA
8. LISA MAYANI

SEKOLAH TINGGI KEGURUAN DAN ILMUPENDIDIKAN

PERSATUAN GURU REPUBLIK INDONESIA

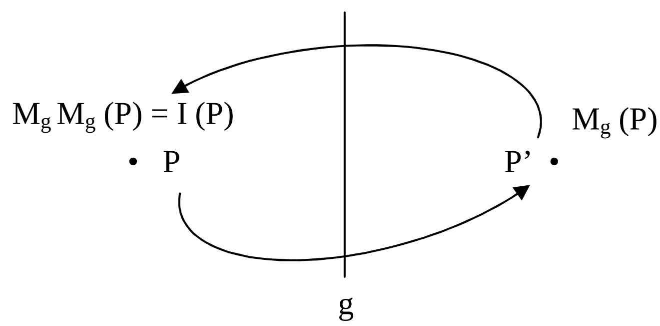
STKIP – PGRI LUBUKLINGGAU

TRANSPORMASI BALIKAN

KETENTUAN DAN SIFAT-SIFAT

Apabila sebuah garis dan M_g refleksi pada garis g, maka M_gM_g (P) = P atau M_g^2 (P) = P. Jadi, M^2 adalah suatu transformasi yang memetakan setiap titik pada dirinya.

Transformasi demikian dinamakan transformasi identitas yang dilambangkan dengan huruf I, sehingga I (P) = P, $\forall$ P.



Contoh :

Buktikan bahwa I adalah suatu transformasi.

Jawab :

Jika I suatu transformasi maka akan berlaku sifat-sifat berikut:

Jika T suatu transformasi maka TI (P) = I [T (P)] = T (P), $\forall$ P . Jadi IT = T.

Begitu pula IT (P) = I [T (P)] = T (P) $\forall$ P.

Jadi IT = T sehingga TI = IT = T

Dengan demikian transformasi identitas I berperan sebagai bilangan 1 dalam himpunan transformasi-transformasi.

Dalam himpunan bilangan-bilangan real dengan operasi perkalian pada setiap $x \neq 0$ ada balikan x^{-1} sehingga $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$,

Maka transformasi balikan T ini dapat ditulis sebagai T^{-1}.

Jadi $TT^{-1} = T^{-1} \cdot T = 1$

TEOREMA 1. Setiap transformasi T memiliki balikan

Apabila T adalah suatu transformasi, sehingga dapat diartikan padanan L sebagai berikut :

Andaikan X € V dan V suatu bidang. Oleh karena T suatu transformasi, maka T adalah bijektif. Jadi ada prapeta A € V.

Sehingga T (*A*) = X. Jika L (X) = A artinya L (X) adalah prapeta dari X. Sehingga dari T (A) = X T [L(X)] = X. atau (TL) (X) = I (X) $\forall$ X € V, ini berati TL = I. maka (LT) (X) = L [T(X)] = X

Apabila T (X) = B, maka L (B) = X, jadi L [T (X)] = L (B) = X. Jadi pula (LT) (X) = X = I (X) $\forall$ X € V, Jadi LT = I Sehingga TL = LT = I

Sekarang kita buktikan bahwa L adalah suatu transformasi.

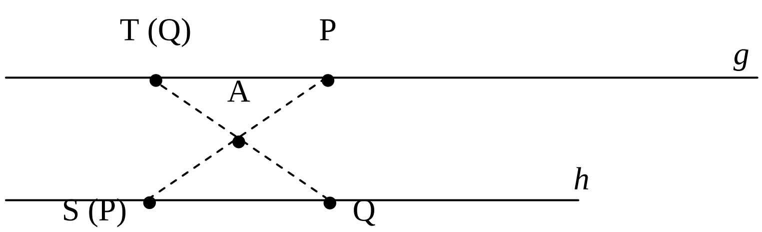
Dari definisi L jelas L suatu padanan yang surjektif, andaikan L (X_1) = L (X_2) dan andaikan T (A_1) = X_1, T (A_2) = X_2 dengan L (X_1) = A_1 dan L (X_2) = A_2. Oleh karena T suatu transformasi maka karena A_1 = A_2 kita peroleh X_1 = X_2. Jadi dari L (X_1) = L (X_2), X_1 = X_2, sehingga L injektif. Dengan demikian terbukti bahwa L bijektif di L suatu transformasi. Transformasi L ini disebut balikan dari transformasi T dan dilambangkan dengan L = T^{-1}. Jadi L = T^{-1}.

Contoh Soal :

Terdapat dua garis g dan h yang sejajar dan di titik A. Padanan S ditentukan:

$$S\ (P) = \overleftrightarrow{AP} \cap h \ \ \forall P \in g \ \ \text{dan } T\ (Q) = \overleftrightarrow{QA} \cap g \ \ \forall Q \in h$$

Jadi daerah nilai S adalah garis g dan daerah asal T adalah garis h. Sedangkan daerah nilai S adalah h dan daerah nilai T adalah g. Untuk P € S, maka (TS) (P) = T [S (P)] = P = I (P). Dan untuk Q € h (ST) Q = S [T (Q)] = Q = I (Q), sehingga TS = ST = I. Ini berarti T balikan dari S dan S balikan dari T.



TEOREMA 2. Setiap transformasi memiliki hanya satu balikan.

Apabila T suatu transformasi dengan dua balikan S_1dan S_2. Jadi (TS_1) (P) = S_1 dan S_2 Jadi (TS_1) (P) = (S_1T) (P) = I (P), $\forall$ P dan (TS_2) (P) = S_2 (P) = I (P), $\forall$ P, Sehingga (TS_1) (P) = (TS_2) (P) $\rightarrow$ T [(S_2) (P)] = T [(S_2) (P)]. Karena T transformasi maka S_1 (P) = S_2 (P), $\forall$ P, Sehingga $S_1 = S_2$. Jadi balikan T adalah $S_1 = S_2 = S_1$.

TEOREMA 3. Balikan setiap pencerminan pada garis adalah pencerminan itu sendiri

Apabila pencerminan pada garis g, M_g. Jika M_g (X) = Y; X € g maka $M_g(M_g(X))$ = X atau (M_gM_g) (X) = I (X), $\forall$ X € g. Jadi $M_g \circ M_g = I$.

Jika X € g maka Mg (X) = X sehingga Mg (X) = Mg [Mg(X)] atau juga $M_g \circ M_g = I$. Jadi untuk segala X diperoleh :

$$\boxed{M_g \circ M_g = I}$$

Dengan demikian $M_g^{-1} = M_g$

DEFINISI : Suatu tranformasi yang balikkannya adalah transformasi itu sendiri dinamakan suatu *Involusi*.

Apabila T dan S transformasi maka masing-masing memiliki balikan yaitu T^{-1} dan S^{-1}. Komposisi transformasi, yaitu T ∘ S adalah juga suatu transformasi. Jadi ada balikan $(T \circ S)^{-1}$. Hubungan T^{-1} dan S^{-1} terdapat pada teorema selanjutnya, yaitu ;

TEOREMA : Apabila T dan S transformasi-transformasi maka $(T \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ T^{-1}$

Kita telah mengetahui bahwa $(T \circ S)^{-1} \circ (T \circ S) = I$. Tetapi $(S^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ S) = S^{-1} \circ (T^{-1} \circ T) \circ S \circ I \circ S = S^{-1} \circ S = I$. Oleh karena suatu transformasi memiliki hanya satu balikan maka $(T \circ g)^{-1} = -S^{-1} \circ T^{-1}$.

Jadi, hasil kali transformasi adalah hasil kali balikan-balikan transformasi dengan urutan yang terbalik.

CONTOH SOAL :

1. Pada sebuah sistem sumbu ortogonal ada garis

   e = { (x,y) | y = x } dan h = { (x,y) | y = 0 }

   Tentukan P sehingga (M_hM_g) (P) = R dengan R = (2,7) !

   Jawab :

   Apabila P = (x,y), maka diperoleh berturut-turut $(M_g^{-1}M_h^{-1})(M_hM_g)$ (P) = $(M_g^{-1}M_h^{-1})$ (R). Jadi P = M_g^{-1} [M_h^{-1} (R)].

   Jadi, P = M_g^{-1} [M_h^{-1} (R)]. Oleh karena R = (2,7) dan $M_h^{-1} = M_h$, maka M_h^{-1} (R) = M_h (R) = (2,-7) sehingga

   $M_g^{-1} \cdot M_h^{-1}$ (R) = M_g^{-1} (2,-7) = M_g (2,7) = (7,2) sehingga P = (-7, 2)

LATIHAN :

1. Diketahui garis-garis g dan h yang berpotongan dan titik P dan Q tidak pada garis-garis tersebut.

   Lukislah :

   a. R sehingga M_gM_h (R) = P
   b. K Sehingga W_gM_g (K) = Q
   c. E sehingga V_hM_g (E) = P
   d. D sehingga W_gM_g (K) = D