RUAS GARIS BERARAH

OLEH :

1. **ASRIA HIRDA YANTI (4007014)**
2. **ANNIE RACHMAWATI (4006116)**
3. **RUPITA FITRIANI (4007036)**
4. **PERA HIJA TERISTIANA (4007001)**
5. **HARTATI SUSANTI (4007166)**

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA

JURUSAN PENDIDIKAN MATEMATIKA DAN ILMU ALAM

SEKOLAH TINNGI KEGURUAN DAN ILMU PENDIDIKAN

PERSATUAN GURU REPUBLIK INDONESIA

(STKIP-PGRI LUBUKLINGGAU)

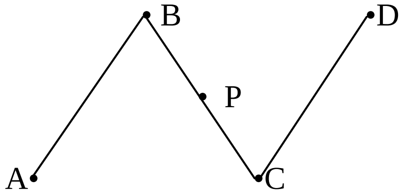
2010

RUAS GARIS BERARAH

Definisi : Suatu ruas (garis berarah adalah sebuah ruas garis yang salah satu ujungnya dinamakan (titik) pangkal dan ujung yang lain dinamakan (titik) akhir.

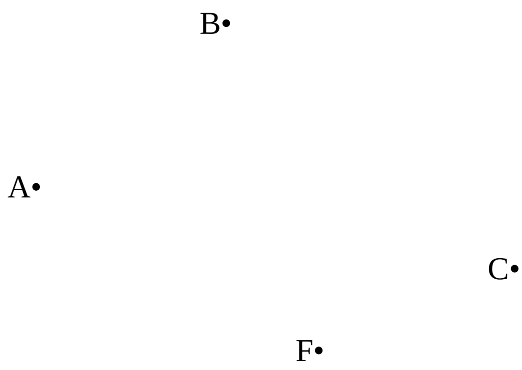
Apabila A dan B dua titik. Lambang $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ kita gunakan sebagai ruas berarah dengan pangkal A dan titik akhir B.

Definisi : $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ apabila S_A (A) = D dengan titik P titik tengah BC



Contoh :

Diberikan titik A, B, C dan F pada bidang Euclid seperti berikut :



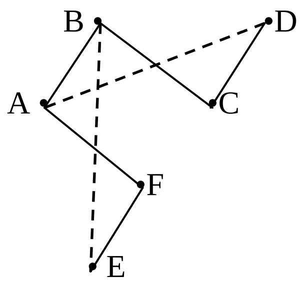
Lukis : i) D sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$

ii) E sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$

Penyelesaian

i. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ apabila S_P (A) = D, dengan P titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Akibatnya titik D diperoleh dengan cara menarik titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, anda namakan titik P, kemudian mencari D sehingga D = S_P (A)

ii. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ apabila S_Q (B) = E, dengan Q merupakan titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{AF}}$. Karena S_Q (A) = F maka Q merupakan titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{AF}}$. Karena Q titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BE}}$ maka S_Q (B) = E. sehingga titik Q, kemudian mencari titik E sehingga E = S_P (B)



Teorema : Andaikan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ dua garis berarah yang tidak segaris, maka segi empat ABCD sebuah jajaran genjang jika dan hanya jika $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$

Bukti:

1. Andaikan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dan $\overrightarrow{CD}$. Jika P titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, maka S_p (A) = D menurut definisi ke-ekivalenan: diagonal segiempat ABDC membagi sama panjang di P. Ini berarti ABDC sebuah paralelogram.
2. Andaikan ABDC sebuah paralelogram maka diagonal-diagonal $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$ berpotongan dititik P. Sehingga S_p (A) = D sebuah titk tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$ maupun titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Jadi $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$

Akibat : Jika $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ sejajar atau segaris.

Contoh :

Buktikan bahwa apabila $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ maka AB = CD dan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \mathbin{//} \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ atau $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$.

Penyelesaian :

Kita perhatikan dua kasus, yaitu

i. Apabila A, B dan C kolinear, maka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{BC}}$

ii. Apabila A, B dan c tidak kolinear, maka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$. Jadi apabila $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ maka $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ atau $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{CD}}$

Teorema : Diketahui ruas-ruas garis berarah $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, dan $\overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ maka

1. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (sifat refleksi)
2. Jika $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ maka $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ (simetrik)
3. Jika $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ maka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ (transitif)

Bukti :

1. Namakanlah titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dengan P, maka S_p (A) = B. Jadi $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

2. Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ maka segiempat ABDC jajaran genjang. Karena segiempat CDBA = segiempat ABDC, maka segiempat CDBA jajaran genjang. Akibatnya $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

3. Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ maka segiempat ABDC jajaran genjang. Akibat lebih lanjut $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{DC}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{DC}}$ . . . . . (1)

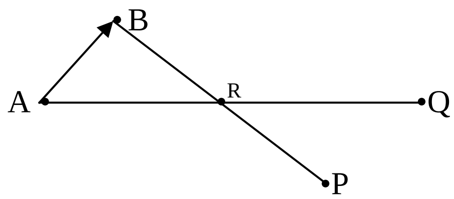
   Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} = \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$ maka segiempat CDEF jajaran genjang. Akibat lebih lanjut $\overline{\boldsymbol{CD}} = \overline{\boldsymbol{FE}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{FE}}$ . . . . . (2)

   Berdasarkan (1) dan (2) dapat disimppulkan bahwa :

   $\overline{\boldsymbol{AB}} = \overline{\boldsymbol{FE}}$ dan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{FE}}$

   Jadi segiempat sebuah jajaran genjang. Akibatnya $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$

Teorema : Diketahui sebuah titik P dan suatu ruas berarah $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ maka ada titik tunggal Q sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$



Bukti :

Untuk membuktikan keberadaan Q andaikan R titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}}$. Jika Q – S_r (A) maka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$ atau $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Untuk membuktikan ketunggalan titik Q. Andaikan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{PT}}$. Jadi S_R (A) = T oleh karena R titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{BP}}$. Berhubung peta A oleh S_R tunggal, maka T = Q. Jadi ini berarti $\overrightarrow{\boldsymbol{PQ}}$ satu-satunya ruas garis berarah dengan pangkal P dan titik akhir Q yang ekivalen dengan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Akibat I : Jika $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dan $P_3P = (x_3, y_3)$ titik- titik yang diketahui maka titik P $(x_3 + x_2 – x_1, y_3 + y_2 – y_1)$ adalah titik tunggal sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{P_3P}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$

Akibat II : Jika $P_n = (x_n, y_n)$, n = 1, 2, 3, 4 maka $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_4}}$ jika dan hanya jika $x_2 – x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 – y_1 = y_4 - y_3$

Bukti akibat I :

Misalkan P = (x, y), karena $\overrightarrow{\boldsymbol{P_3P}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$ dan misal R titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{PP_1}}$ maka S_R $(P_3) = P_2$ atau R titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_3}}$. Akibatnya diperoleh hubungan

$$R = \left(\frac{x + x_1}{2}, \frac{y + y_1}{2}\right) = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

Jadi, $x = x_3 + x_2 – x_1$ dan $y = y_3 + y_2 – y_1$

$P = (x_3 + x_2 – x_1, y_3 + y_2 – y_1)$

Bukti akibat II :

Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_4}}$, misalkan titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{P_2P_3}}$, maka R titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_4}}$ akibatnya $R = \left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + x_4}{2}, \frac{y_1 + y_4}{2}\right)$

Sehingga $x_2 + x_3 = x_1 + x_4$ dan $y_2 + y_3 = y_1 + y_4$

Atau $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$

Karena $x_2 – x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 – y_1 = y_4 - y_3$

dan $P_1P_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$P_3P_4 = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2} \rightarrow P_1P_2 = P_3P_4$ . . . . (1)

Karena $x_2 – x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$ dan koefisien arah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$ adalah $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Koefisien arah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_4}}$ adalah $\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3} \rightarrow \overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}}$ // $\overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_4}}$ . . . .(2)

Berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpulkan $\overrightarrow{\boldsymbol{P_1P_2}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{P_3P_4}}$

Definisi : Andaikan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ sebuah garis berarah dan k suatu bilangan real. Apabila k > 0, maka k $\overrightarrow{AB}$ adalah ruas garis berarah $\overrightarrow{AP}$ sehingga P ∈ $\overrightarrow{AB}$ dan AP = k (AB).

Apabila k > 0 maka k $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ adalah ruas gari berarah $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ dengan P anggota sinar yang berlawanan arah dengan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ sedangkan AP = |k| AB. Dikatakan bahwa $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ adalah kelipatan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Contoh :

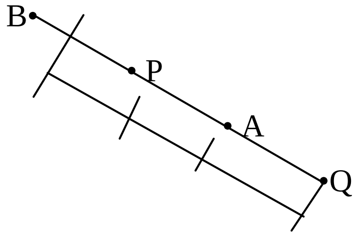
Apabila diberikan titik-titik A dan B seperti dibawah ini, lukislah :

i. $\frac{1}{2}\ \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$
ii. $-\frac{3}{4}\ \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Penyelesaian :

i. Karena K = $\frac{1}{2}$ > 0, maka $\frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ adalah $\overrightarrow{\boldsymbol{AP}}$ sehinggga P ∈ $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ dengan AP = $\frac{1}{2}$ (AB).

ii. Karena k = $-\frac{3}{4} < 0$, maka $-\frac{3}{4}\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ adalah $\overrightarrow{\boldsymbol{AQ}}$ sehingga Q anggota sinar yang berlawanan dengan $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$, dengan AQ = $\left| -\frac{3}{4} \right|$ AB = $\frac{3}{4}$ AB.



Soal :

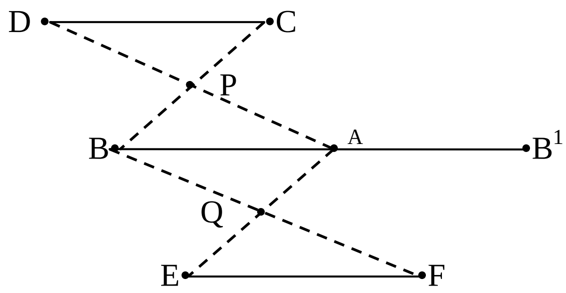
1. Diketahui titik A, B, C, D tiap tiga titik tak ada yang segaris. Lukislah :
   a) Titik E sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{CE}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$
   b) Titik F sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{DF}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$
   c) S_A ($\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$)
2. Diketahui A = (2,1), B = (3,4) dan C = (-1,5). Tentukan
   a) D sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{CD}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$
   b) E sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{AE}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$
   c) F sehingga $\overrightarrow{\boldsymbol{AF}} \cong \frac{1}{2}\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$
3. Jika A = (1, 3), B = (2, 7) dan C = (-1, 4) adalah titik-titik sudut parallelogram ABCD. Tentukan koordinat-koordinat titik D.

Penyelesaian :

1. Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{CE}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ maka $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{CE}}$. Akibatnya S_P (A) = E dengan titik tengah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$. Sehingga titik E diperoleh dengan cara mencari titik P sebagai titik tengah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{BC}}$, kemudian mencari E sehingga E = S_P (A).

   Karena $\overrightarrow{\boldsymbol{DF}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{BA}}$ maka $\overrightarrow{\boldsymbol{BA}} \cong \overrightarrow{\boldsymbol{DF}}$. Akibatnya S_P (B) = F dengan Q titik tengah $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$. Sehingga titik F diperoleh dengan cara mencari titik Q sebagai titik tengah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{AD}}$, kemudian mencari titik F sehingga F = S_P (B).

   Karena S_A (A) = A dan B^I = S_P (B) dengan A titik tengah dari $\overrightarrow{\boldsymbol{BB^I}}$, maka S_P ($\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$) = $\overrightarrow{\boldsymbol{AB^I}}$



2. Karena $\overrightarrow{CD} \cong \overrightarrow{AB}$, dimisalkan D = (x, y) didapat hubungan

   $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$

   x – (-1) = 3 – 2 dan y – 5 = -4 – 1. Sehingga x = 0 dan y = 0. Jadi D = (0, 0).

   Karena $\overrightarrow{AE} \cong \overrightarrow{BC}$, dimisalkan E = (x, y) didapat hubungan

   $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$

   x – 2 = -1 – 3 dan y – 1 = 5 + 4. Sehingga x = -2 dan y = 10. Jadi D = (-2, 10).

   Karena $\overrightarrow{AF} \cong \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, k > 0, maka F ∈ $\overrightarrow{AC}$ dan AF = $\frac{1}{2}$ AC. Jadi F titik tengah $\overline{AC}$. Jadi D = ($\frac{1}{2}$, 3)

3. Karena ABCD suatu jajaran genjang, maka $\overrightarrow{AB} \cong \overrightarrow{DC}$. Misalkan D = (x, y) maka didapat hubungan $x_2 - x_1 = x_4 - x_3$ dan $y_2 - y_1 = y_4 - y_3$

   2 – 1 = -1 – x dan 7 – 3 = 4 – y. sehingga x = -2 dan y = 0. Jadi D = (-2, 0)